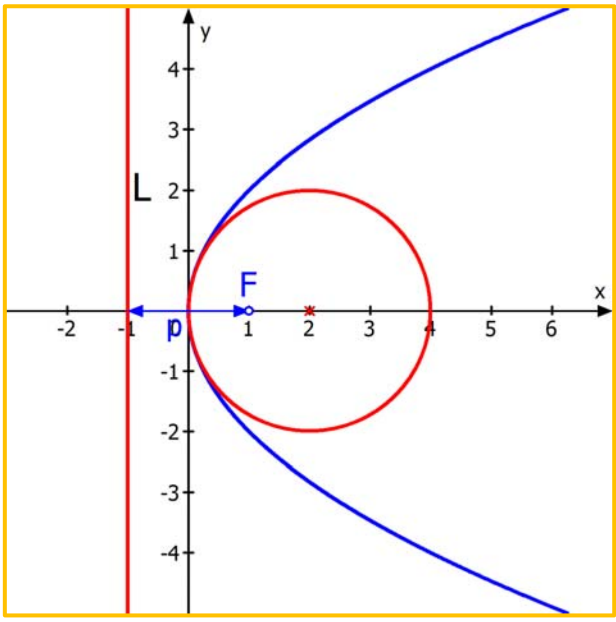



# Parabeln

Text Nr. 54[illegible]20

Stand: 19. Juli 20[illegible]3

**FRIEDRICH W. BUCKEL**

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

www.mathe-cd.de

# Vorwort

Parabeln gehören zu den ersten Kurven, die man im Unterricht bespricht. Sie sind als Schaubilder quadratische Punktionen gut zu untersuchen.  Betrachtet man jedoch Parabeln, die in x-Richtung Geöffnet sind, stößt man auf Wurzelfunktionen.
Anders jedoch, wenn man diese Parabeln mit den Methoden Kurven der analytischen Geometrie untersucht. Dies wird im Ordner 25_Parabeln geschehen.
Hier betrachten wir Parabeln unter dem Aspekt, dass sie algebraische Kurven 2. Grades sind.
Wir gehen der Sache nach, welche Arten von Gleichungen es gibt, auch mit Parametern und Polarkoordinaten.

# Inhalt

# 1 Vorschau

## 1.1 Parabeln, in y-Richtung geöffnet

Eine Parabel kann man z. B. als Graph einer ganzrationalen Funktion 2. Grades definieren.
Die **Kurvengleichung** lautet dann im kartesischen Koordinatensystem:

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \text{für } a \neq 0 \qquad (1)$$

Parabeln mit dieser Gleichung sind in y-Richtung geöffnet: Ist a > 0, dann nach oben, ist a < 0, dann nach unten. Ihr Scheitel ist $S\left(-\frac{b}{2a} \mid c - \frac{b^2}{4a}\right)$.

Ist a = 1 oder a = - 1, nennt man die Kurve eine **Normalparabel**.

In ihrer einfachsten Lage hat sie den Scheitel im Ursprung: $y =$ ... oder $y$ ... (2)

Streckt man sie in y-Richtung, liegt der Scheitel immer noch im Urs...ng: $y = a \cdot x$ ... (3)

Verschiebt man solche Parabeln kommt man auf die

**Scheitelgleichung**: $y = a \cdot (x - x_S)^2 + y$ ... (4)

Hinweis: Im **Text 18027** wird gezeigt, wie man Para...n ...ch Strec...n und V...iebungen abbildet. Dort lernt man auch die Umkehrun... W... rechnet m... ...ichung (1) den Parabelscheitel. Die Methode dazu heißt qua...atisc... Ergänzung. Siehe auch 18029.

### Aufgabe 1 Bestimme den Schei... ...Parabel $y = $ ... $x^2 - 2$...

**1. Lösung mit quadratischer Ergänzung:**

Gegeben: $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$

Steckfaktor $\frac{1}{2}$ aus de... Summanden ausklam...n: $y = \frac{1}{2}(x^2 - 4x) + 3$

(Aus...mmern bede...t in der Klamme... eine Division durch $\frac{1}{2}$, also „mal 2".)

Ziel der rechten Seite: $y = \frac{1}{2} \cdot (x-2)^2 + \ldots$

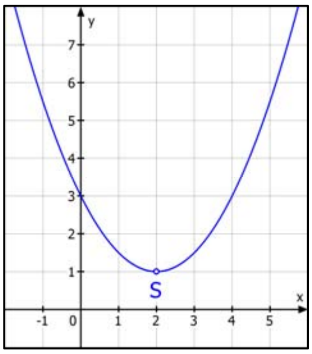
Dazu muss man das Qua... ergänzen: $y = \frac{1}{2}\left(x^2 - 4x + \boxed{4}\right) + 3 - \boxed{\frac{1}{2} \cdot 4}$

U...ie „Gleichung zu ...", muss ...ie Ergänzung wieder kompensieren.
...ei muss man beachte... ...ass nicht das Quadrat $2^2 = 4$ ergänzt worden ist, sondern $\frac{1}{2} \cdot 4$, de... ...r Faktor $\frac{1}{2}$ vor der ...mmer gehört dazu. Also wird rechts wieder $\frac{1}{2} \cdot 4$ subtrahiert.

Jetzt ken... ...n die ...heitelform: $y = \frac{1}{2} \cdot (x-2)^2 + 1$

Den Scheitel ...) liest man so ab, dass man x der entgegengesetzte Vorzeichen nimmt.

**2. Lösung mit der 1. Ableitung.**




Gegeben: $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$

1. Ableitungsfunktion: $f'(x) = x - 2$

Mit dieser Funktion berechnet man z. B. Tangentensteigungen.
Da eine in y-Richtung geöffnete Parabel im Scheitel eine waagerechte Tangente besitzt, fragt man: Wo ist die Tangentensteigung 0:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_S = 2$$

$$y_S = f(2) = \tfrac{1}{2} \cdot 4 - 4 + 3 = 1 \quad \Rightarrow \quad S(2 \mid 1)$$

## 1.2 Parabeln, in x-Richtung geöffnet

Spiegelt man die Parabel $y = x^2$ an der 1. Winkelhalbierenden, oder dreht man sie um den Ursprung um $90^O$ im Uhrzeigersinn, entsteht die nach rechts geöffnete Parabel: $y^2 = x$.

Sie ist das Schaubild zweier Ersatzfunktionen: $y = f_1(x) = \sqrt{x}$ und $y = f_2(x) = -\sqrt{x}$

Streckt oder verschiebt man diese Parabel, entstehen Kurven mit diesen Gleichungen:

$$ay^2 + bx + cy + d = 0$$

bzw. in der **Scheitelgleichung:** $(y - y_S)^2 = 2p \cdot (x - x_O)$

*Warum man den Faktor 2p verwendet, wird in Abschnitt 2 gezeigt.*

### Bestimmung des Scheitels mit quadratischer Ergänzung

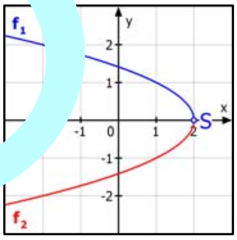
**Aufgabe 2:**

a) $y^2 + x - 2 = 0$

Ersatzfunktionen: $y = \pm\sqrt{2 - x}$

Scheitelgleichung: $y^2 = -x + 2$ $S(0\,|\,2)$

Die Parabel ist nach links geöffnet.




b) $y^2 - 4y - 2x + 6 = 0$

Zuerst quadratische Ergänzung:

$(y^2 - 4y + \square) = 2x - 6$

Ziel: $(y - 2)^2 ....$

$(y^2 - 4y + \boxed{4}) = 2x - 6 + \boxed{4}$

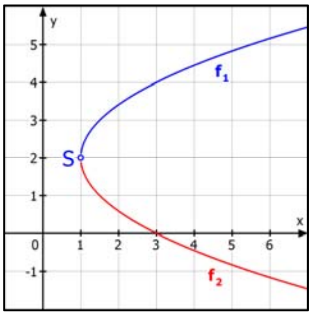
$(y - 2)^2 = 2x - 2$

$(y - 2)^2 = 2(x - 1)$ (1)

Scheitel: $S(1\,|\,2)$

Ersatzfunktionen: $y - 2 = \pm\sqrt{2x - 2}$

$f_{1,2}(x) = 2 \pm \sqrt{2x - 2}$




c) $4y^2 + 4y - x - 1 = 0$

Zuerst quadratische Ergänzung:

Faktor 4 ausklammern: $4 \cdot (y^2 + y + \square) = x + 1$

Ziel: $4 \cdot (y^2 + y + \square) = 4 \cdot (y + \tfrac{1}{2})^2 + ....$

Quadratisch ergänzen: $4(y^2 + y + \boxed{\tfrac{1}{4}}) = x + 1 + \boxed{4 \cdot \tfrac{1}{4}}$

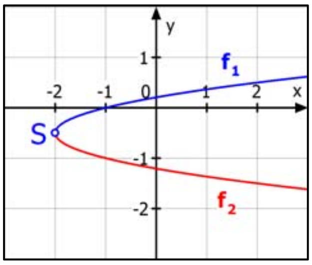
Links wurde $4 \cdot \boxed{\tfrac{1}{4}} = 1$ ergänzt, also auch rechts!!

$4 \cdot (y + \tfrac{1}{2})^2 = x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad (y + \tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{4}(x + 2)$

Ergebnis: $S(-2\,|\,-\tfrac{1}{2})$

Ersatzfunktionen: $y + \tfrac{1}{2} = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{x + 2}$

$f_{1,2}(x) = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{x + 2}$




## 1.3 Parabeln in Schräglage werden in diesem Text nicht besprochen.

*Siehe Text 54301.*

# 2 Parabel als geometrischer Ort

Man kann eine Parabel über eine geometrische Eigenschaft definieren:

> Die Menge aller Punkte, für welche die Entfernung von einem festen Punkt F und von einer festen Geraden L gleich groß ist, nennt man (bzw. ist eine) **Parabel.**
> F nennt man **Brennpunkt** der Parabel, L heißt **Leitlinie**

Ich nehme den Beweis bzw. die Herleitung der Gleichung für den Fall vor, dass die Parabel in x-Richtung geöffnet ist.

Üblicherweise gibt man dem Brennpunkt die Koordinaten $F\left(\frac{1}{2}p \mid 0\right)$

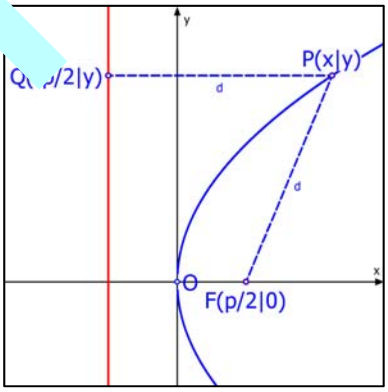
Die Leitlinie erhält die Gleichung $x = -\frac{1}{2}$

In unserer Abbildung ist p =

**p ist ein Parameter, der den Abstand des Brennpunkt von der linie angibt.**

Die Strecke PF heißt „Brennstrahl“, PQ „Leitstrahl“.

**Nun zur Rechnung:**




Es sei $P(x \mid y)$ ein Parabelpunkt. Dann g

1. $\overline{PQ} = x - \left(-\frac{1}{2}p\right) \quad + \frac{1}{2}p$

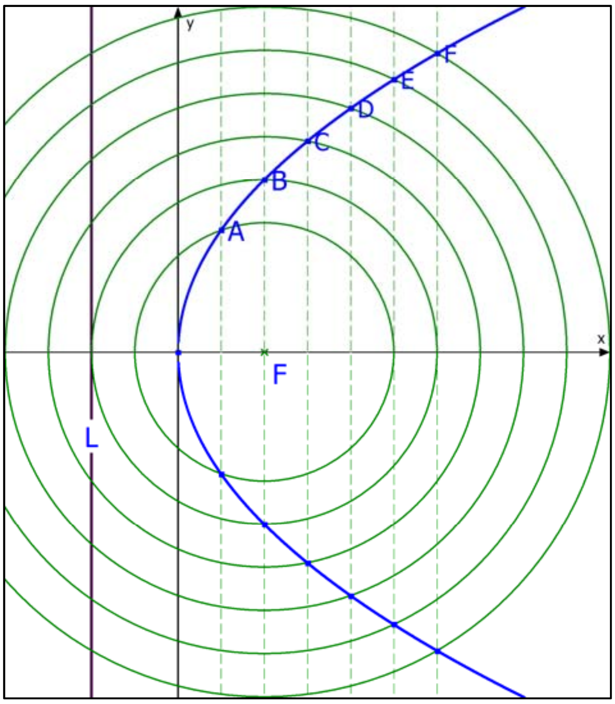
2. $\overline{PF} = \sqrt{(x \quad )^2 + (y-0)^2}$

$\overline{PQ} = \overline{PF}: \quad \sqrt{(x- \quad )^2 + y^2} = \quad \frac{1}{2}p \qquad |^2$

$\cancel{x^2} - px + \quad y^2 = \cancel{x^2} + px$

$y^2 =$

Hier ergibt sich die
**punkt Konstruktion vo arabelpunkten:**




Man zeichne F Kreise, h mit den Radien 3, 4, 5, und 8.

Dann zeichnet man llelen zur Leilinie in denselben Abständen.

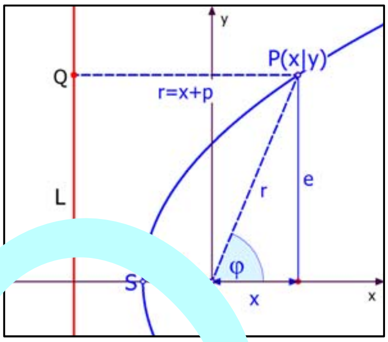
Die entsprechenden Schnittpunkte sind Parabelpunkte.

A hat von F und L den Abstand 3,
B hat von F und L den Abstand 4,
usw.

# 3 Gleichungen mit Polarkoordinaten

## 1. Polarkoordinatensystem:

**Der Brennpunkt sei der Pol, die Parabelachse sei die Polarachse.**



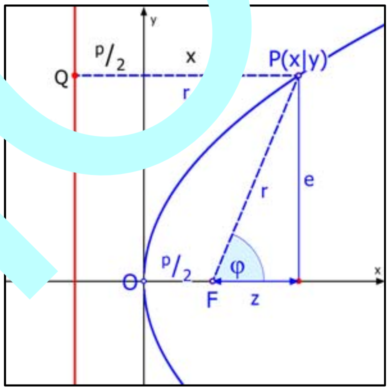

**1. Herleitung:** $\cos(\varphi) = \frac{x}{r} \Rightarrow r \cdot \cos(\varphi) = x$ (a)

Andererseits ist $r = \overline{PQ} = x + p$ (b)

(b) – (a): $r - r \cdot \cos(\varphi) = p$

$r(1 - \cos(\varphi)) = p$

$$\boxed{r = \frac{p}{1 - \cos(\varphi)}}$$




**2. Herleitung:** (Andere Lage des Ursprungs)

Dann gilt: $\cos(\varphi) = \frac{z}{r}$

Es ist $z = x - \frac{1}{2}p$ : $\cos(\varphi) = \frac{x - \frac{1}{2}p}{r}$

Also $r \cdot \cos(\varphi) = x - \frac{1}{2}p$ (

Andererseits ist $r = \overline{PQ} = x$ (b)

(b) – (a): r ... os(φ) = ...

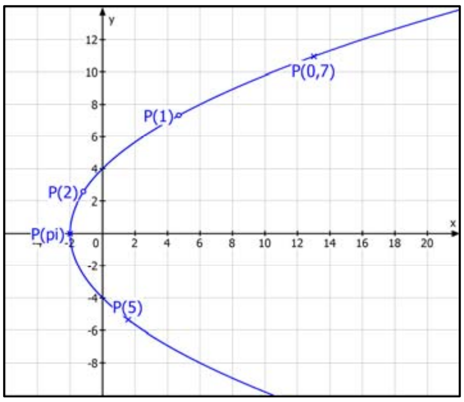
... 1 – cos(φ)) = p

r = p / 1– ... (φ)

*Achtung: Gibt man diese Gle... ein Grafikpr... mm ein (z. B. MatheGrafix), dann geht dieses davon aus, dass ... Ursprung u... der Pol ident... sind und liefert die obige Abbildung.*

### Verteil... der Punkte ... bhäng... vom Parameter $\varphi$:

Zunä... einmal ist klar, dass ... Kosinusfunktion und somit auch r eine Periode von $2\pi$ .




Nebens... d sieht man einig... urvenpunkte in Abhängigkeit von dem in ... mern stehen... Wert von $\varphi$ .

Für $\varphi \to 0$ geh... (φ) ... und der Nenner gegen 0.

Das gibt eine Polste... die Funktion r. Also strebt r gegen Unendlich, was man ja am oberen Bogen nach rechts ahnen kann. Für $\varphi = \pi$ folgt: $r(\varphi) = \frac{p}{1-(-1)} = \frac{p}{2}$, was nur für den Parabelscheitel gilt (minimales r).

Mit zunehmendem $\varphi \to 2\pi$ geht der Nenner wieder gegen 0 und der Punkt gleitet auf dem unteren Ast ins Unendliche.

Bedenkt man außerdem, dass $\varphi$ ja der Winkel gegen die positive x-Achse ist, dann wird klar, dass man für $\varphi$ von 0 bis $2\pi$ eine volle Umdrehung gemacht hat.

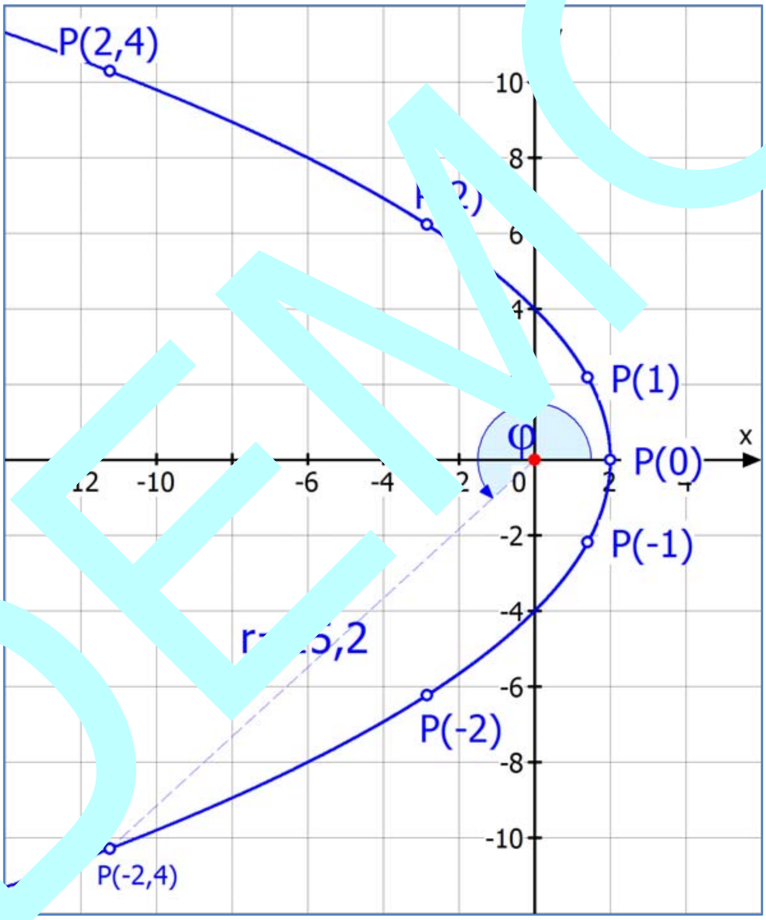
**Es gibt noch eine Parabelgleichung mit Polarkoordinaten:** $r = \frac{p}{1+\cos(\varphi)}$

Die Parabel ist nun nach links geöffnet.
Ich habe die Punkte mit den zugehörigen $\varphi$ – Werten beschriftet. Es ist dabei gleichgültig, ob man $\varphi \in \left]-\pi\,;\,\pi\right[$ oder $\varphi \in [0\,;\,2\pi] \setminus \{\pm\pi\}$ verwendet.

Den Scheitelpunkt, also den kleinsten r-Wert erhält man für $\varphi = 0$: $r(0) = \frac{p}{2}$.

Mit zunehmendem $\varphi$ von 0 gegen $\pi$ (also $\varphi \to 180^{\circ}$ !) geht $r \to \infty$. Die Punkte wandern dann auf dem oberen Parabelast nach links.

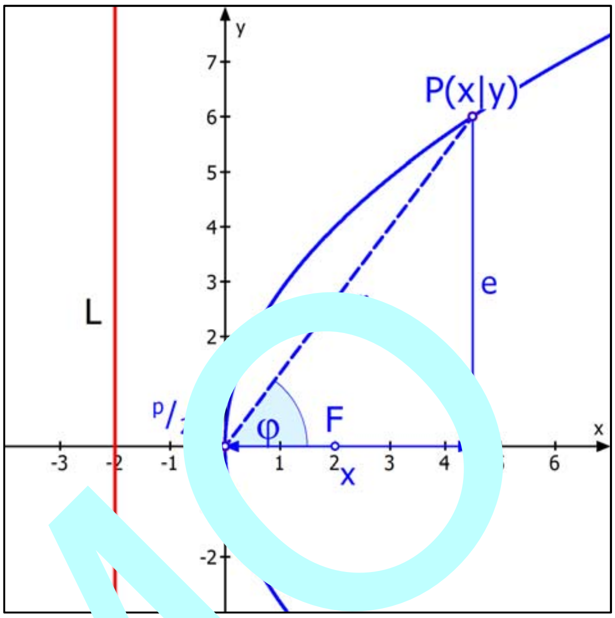
Ist $\pi < \varphi < 2\pi$ oder $-\pi < \varphi < 0$ dann bewegt sich der Parabelpunkt auf dem unteren Ast von links her kommend auf den Scheitel zu.



## 2. Polarkoordinatensystem: $x = r \cdot \cos(\varphi)$ und $y = r \cdot \sin(\varphi)$

**Der Ursprung wird zum Pol, die Parabelachse sei Polarachse.**

### (1) Parabel in x-Richtung: $y^2 = 2px$




Eingesetzt: $r^2 \cdot \sin^2(\varphi) = 2p \cdot r \cdot \cos(\varphi)$

Ist $r \neq 0$, kann man durch r dividieren:

$$r \cdot \sin^2(\varphi) = 2p \cdot \cos(\varphi)$$

$$r = 2p \cdot \frac{\cos(\varphi)}{\sin^2(\varphi)}$$

Für r = 0 erhält man x = y = 0.

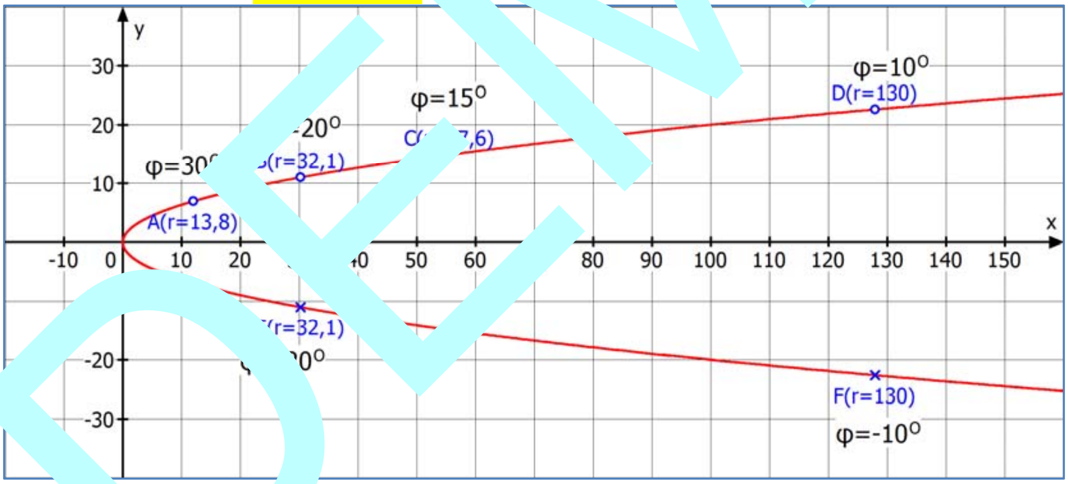
Hinweis: Die Umformung

$$\frac{1}{\sin^2(\varphi)} = \frac{\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)}{\sin^2(\varphi)} = 1 + \cot^2(\varphi)$$

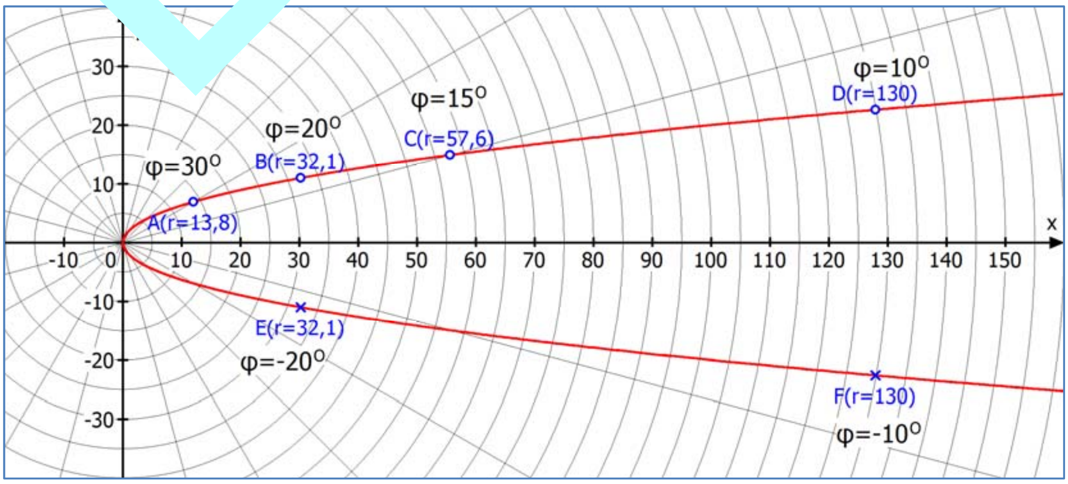
ergibt die gleichwertige Darstellung:

$$r = 2p \cdot \cos(\varphi) \cdot \left(1 + \cot^2(\varphi)\right)$$

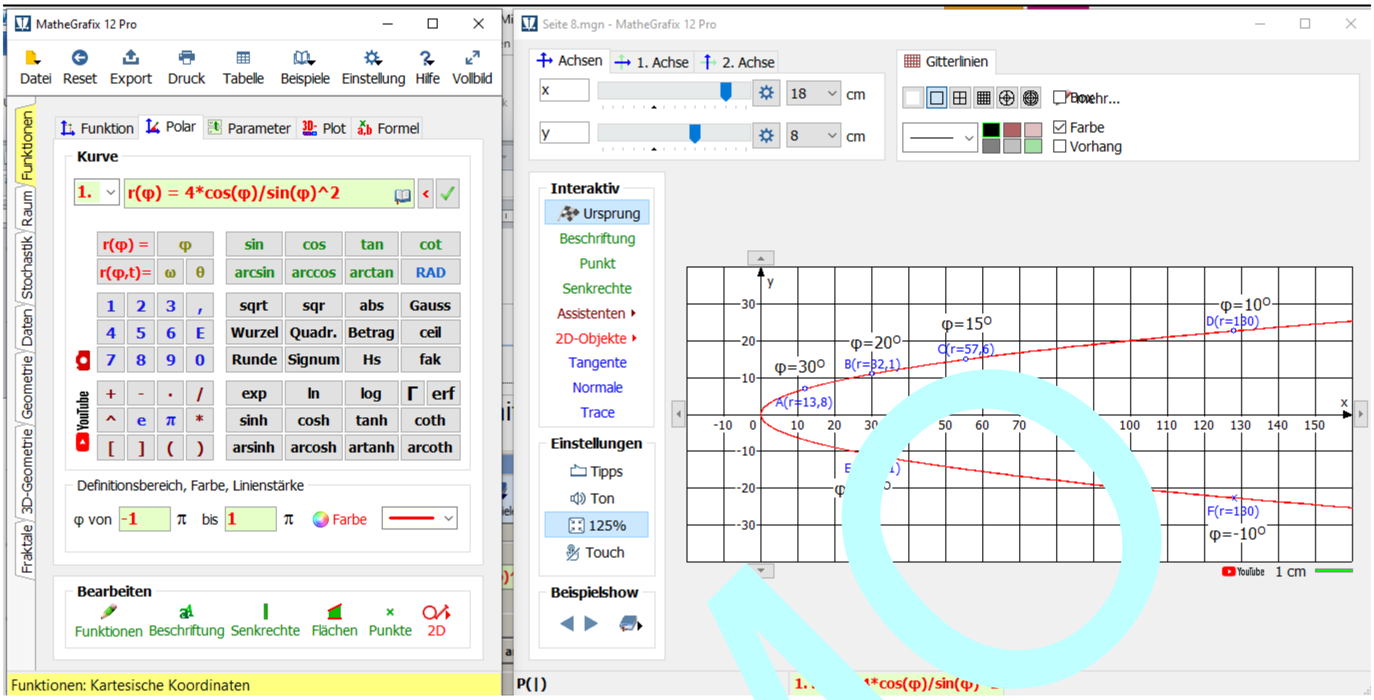
**Beispiel:** $y^2 = 4x$ also $r = 4 \cdot \frac{\cos(\varphi)}{\sin^2(\varphi)}$




oder im Polarkoordinatensystem (MatheGrafix):



Hier die Darstellung mit MatheGrafix 12:




## (2) Parabel in y-Richtung $y = a \cdot x^2$

Dann ist $x = r \cdot \cos(\varphi)$ und $y = r \cdot \sin(\varphi)$

Eingesetzt in $y = a \cdot x^2$ folgt:

$r \cdot \sin(\varphi) = a \cdot r^2 \cos^2(\varphi)$

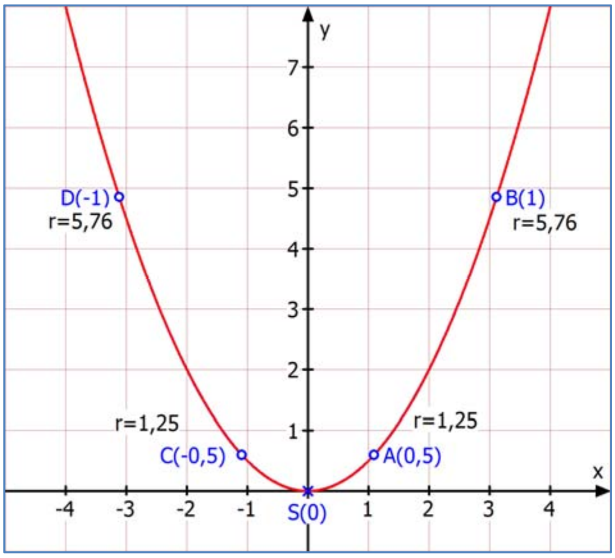
1. Fall: Ist $r \neq 0$, folgt $\sin(\varphi) = a \cdot r\cos^2(\varphi) \Rightarrow r = \dfrac{\sin(\varphi)}{a \cdot \cos^2(\varphi)}$

2. Fall: Ist r = 0, dann folgt x = y = 0.

Die Abbildung zeigt $y = \frac{1}{2}x^2$

bzw. $r = \dfrac{\sin(\varphi)}{\frac{1}{2} \cdot \cos^2(\varphi)} = \dfrac{2\sin(\varphi)}{\cos^2(\varphi)}$

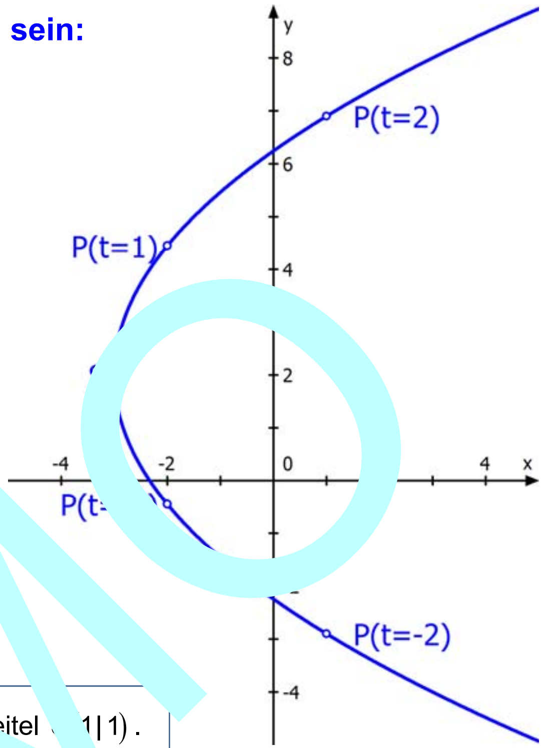
Die Zahlen hinter den Punktbuchstaben gibt den Winkel $\varphi$ an, und zwar im Bogenmaß.



# 4 Parameterdarstellungen

Wie geht man vor, wenn man eine Parabelgleichung $(y-2)^2 = 6(x+3)$ (1) parametrisieren will?

## Die beste Methode scheint *mir* die folgende zu sein:




Man setzt $6x+18 = t^2$

Daraus folgt: $x(t) = \frac{1}{6}t^2 - 3$

Einsetzen in (1): $(y-2)^2 = t^2 \;|\; \sqrt{\ }$

$|y-2| = |t|$

bzw. $y-2 = \pm t$

also $y(t) = 2+t$ oder $y(t) = 2-t$

MatheGrafix:

**x(t) = t^2/6-3**
**y(t) = t+2**

Es reicht übrigens, wenn man das Pluszeichen verwendet.
Das Minuszeichen bringt nichts Neues.

Noch ein Beispiel: $(y-1)^2 = -4(x-1)$ mit dem Scheitel $S(1\,|\,1)$.

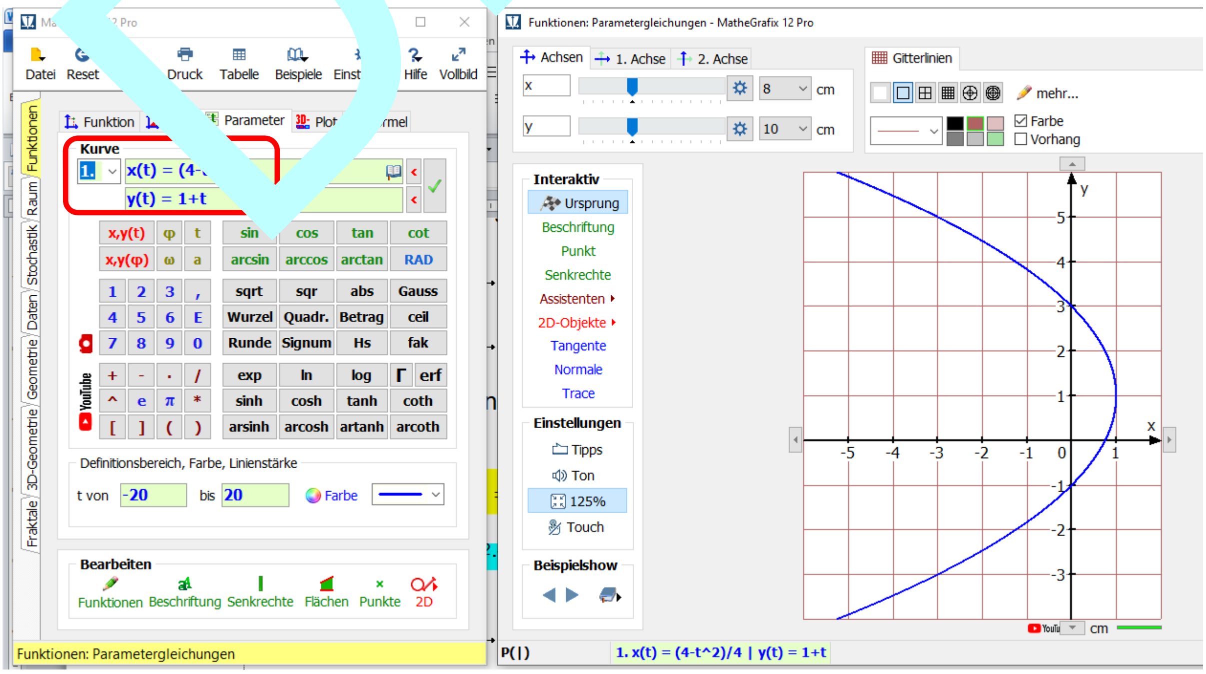
Man setzt die rechte Seite gleich $t^2$: $t^2 = -4x+4$

Daraus folgt: $x = -\frac{1}{4}t^2 + 1$

Einsetzen in (1): $(y-1)^2 = t^2 \Rightarrow |y-1| = |t|$

Daraus: $y-1 = \pm t$

bzw. $y = 1+t$ oder $y = 1-t$

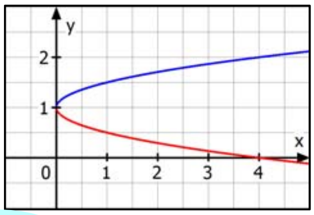


Es gibt zahllose Parameterdarstellungen für Parabeln. Beispiele:

a) $\begin{cases} x = 2t \\ y = -t^2 + 4 \end{cases}$ Mit $t = \frac{1}{2}x$ erhält man $y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$.

b) $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$ Mit $t = y - 1$ erhält man $y = (x-1)^2 + 1$ bzw. $y = x^2 - 2x + 2$

c) $\begin{cases} x = 4t^2 \\ y = 1 + t \end{cases}$ Mit $t = y - 1$ erhält man $x = 4 \cdot (y-1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad (y-1)^2 = \frac{1}{4}x$




d) Besonders „witzig" ist diese Darstellung:

$\begin{cases} x(t) = 1 - \frac{1}{2}\cos^2(t) \\ y(t) = 3 \cdot \cos(t) \end{cases}$ für $t \in [0\,;\,\pi]$

Man bildet $y^2 = 9 \cdot \cos^2(t) \quad \Rightarrow \quad \cos^2(t) = \frac{1}{9}y^2$

und setzt das in die x-Gleichung ein:

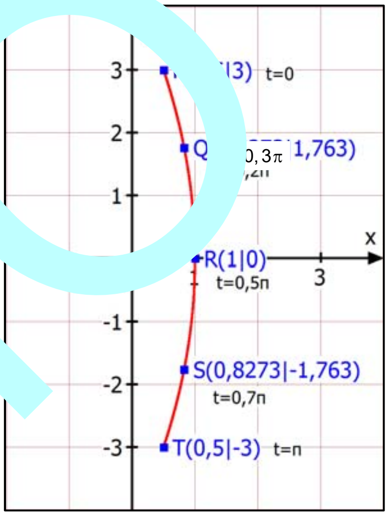
$x = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9}y^2 \qquad y^2 = 18 \cdot (1-x)$

Ersatzfunktionen. $\quad y = \pm 3\sqrt{2(1-x)}$

Das Interessante daran ist, dass man mit dieser Darstellung nur einen begrenzten Parabelbogen erha

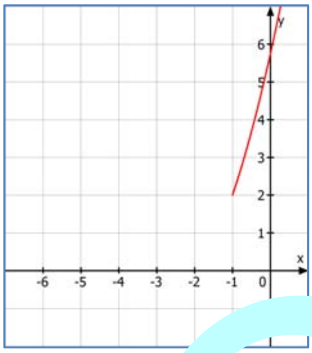
Zu $t = 0$: $x(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $y(0) =$ … $P(t=0) = (\frac{1}{2}$ …$)$

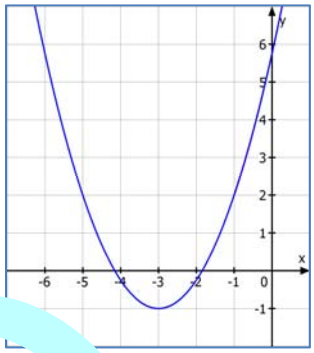
Zu $t = \pi$: $x(\pi) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $y(\pi)$ … $\pi) = (\frac{1}{2} \mid$ …$)$



e) Sogar mit hyperbolischen Funktionen kommt man zu Parabeln:

$\begin{Bmatrix} x(t) = 2\cdot\cosh(t) - 3 \\ y(t) = 3\cdot\sinh^2(t) + 2 \end{Bmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$.





$\cosh(t) = \frac{x+3}{2}$ und $\sinh^2(t) = \frac{y-2}{3}$

Eingesetzt in den „hyperbolischen Pythagoras“:

$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$ erhält man:

$$\frac{(x+3)^2}{4} - \frac{y-2}{3} = 1 \;|\; \cdot 3$$

$$\tfrac{3}{4}(x+3)^2 - (y-2) = 3$$

$$\tfrac{3}{4}(x+3)^2 - 3 = (y-2)$$

$y = \frac{3}{4}(x+3)^2 - 1$ mit dem Scheitel $S(-3\,|\,-1)$

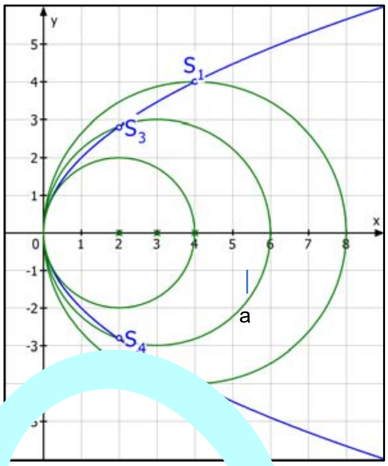
Oder $y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{23}{4}$

*Man erkennt, dass* $y(t) \geq 2$ *ist, und* $x \geq -1$*, weil die Funktion cosh den Minimalwert 1 hat.*

*deshalb liefert die Parameterdarstellung nur einen Parabelbogen, der in* $P(-1|2)$ *endet, während die algebraische Gleichung die ganze Parabel darstellt.*

# 5 Krümmungsradius

## (1) Analytische Herleitung




> Als Krümmungskreis bezeichnet man **den Kreis mit dem größten Radius**, der die Parabel am Scheitel von innen berührt.

Zur Herleitung verwende ich Parabeln in der Lage, in der sie den Scheitel im Ursprung hat.

Sie hat dann diese Gleichung: $y^2 = 2px$

Dann setze ich einen Kreis mit zunächst beliebigem Radius an, der ebenfalls durch den Ursprung geht, also dort die Parabel berüh

Er hat somit diese Gleichung: $(x-r)^2 + y^2 = r^2$.

Die Abbildung zeigt, dass mit kleiner werdendem Radius ... ie Schn...nkte von Kre... nd Parabel Dem Ursprung nähern. Unser Ziel wird es sein, den Radi... zu ...itteln, ... enau in den Ursprung fallen.

**1. Schritt:** Kreisgleichung: $(x-r)^2 + \ldots \rightarrow x^2 - 2r\ldots r^2 + y\ldots^2$

d. h. $x^2 - 2rx + y\ldots$

bzw. $\ldots = -x^2 + 2rx$

Parabelgleic...g: $y^2 = 2px$

Schnittgleichu... $2p\ldots -x^2 + 2rx$

$\ldots 2px - 2rx = \ldots$

$x(\ldots p - 2r\ldots$

1. Lösung: $x_1 = 0$

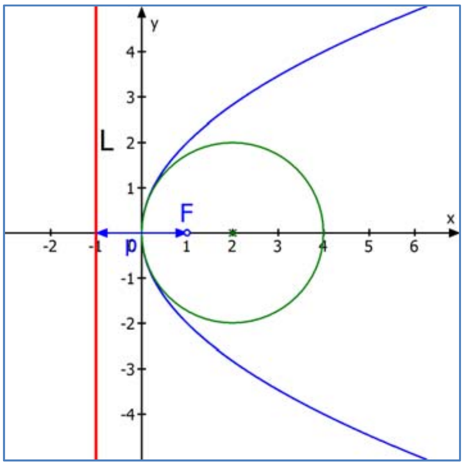
2. Lösung: $x_2 = -2p + 2r$ (für die beiden rechten Schnittpunkte).

**2. Optimier...** Für den K...mungskreis, verlangt man, dass $x_2 = x_1$ wird:

$$0 = -2p + 2r \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{r = p}$$

Der Mittelpunkt des Krümmungskreises ist somit $M_{KKr}(p\,|\,0)$

und die Gleichung lautet: $(x-p)^2 + y^2 = p^2$



## (2) Herleitung mit den Formeln der Differentialgeometrie:

Im Text 54011 wurden für die Krümmung diese Formeln hergeleitet:

für Funktionsschaubilder: $\boxed{\kappa = \dfrac{y''}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}}$ (Seite 17)

für Kurven in Parameterdarstellung: $\boxed{\kappa = \dfrac{\ddot{y}\cdot\dot{x} - \ddot{x}\cdot\dot{y}}{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{3/2}}}$ (Seite 21)

Für die Parabel $y^2 = 2px$ verwende ich die Ersatzfunktionen: $y = \pm\sqrt{2px}$

Zum Ableiten schreibt man um: $y = \pm\sqrt{2p}\cdot x^{1/2}$

$$y' = \pm\sqrt{2p}\cdot\tfrac{1}{2}x^{-1/2} = \pm\frac{\sqrt{2p}}{2}\cdot x^{-1/2} = \pm\frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}}$$

$$y'' = \pm\frac{\sqrt{2p}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right) = \mp\frac{\sqrt{2p}}{4}\cdot x^{-3/2} = \mp\frac{\sqrt{2p}}{4\sqrt{x}^3}$$

$$\kappa = \mp\frac{\sqrt{2p}}{4\cdot\sqrt{x}^3}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{2p}{4x}\right)^{3/2}} = \mp\frac{\sqrt{2p}}{4\cdot\sqrt{x}^3}\cdot\frac{1}{\left(\frac{4x+2p}{4x}\right)^{3/2}} = \mp\frac{\sqrt{2p}}{4\cdot\sqrt{x}^3}\cdot\frac{\sqrt{4x}^3}{\sqrt{4x+2p}^3}$$

$$\kappa = \mp\frac{\sqrt{2p}}{4\cdot\sqrt{x}^3}\cdot\frac{8\cdot\sqrt{x}^3}{\sqrt{4x+2p}^3} = \mp\frac{2\sqrt{2p}}{\sqrt{4x+2p}^3}$$

Wir suchen die Krümmung an der Stelle x = 0: $\kappa(0) = \mp\frac{2\sqrt{2p}}{\sqrt{2p}^3} = \mp\frac{2}{\sqrt{2p}^2} = \mp\frac{2}{2p} = \mp\frac{1}{p}$

Für den Krümmungskreisradius gilt: $r = \left|\frac{1}{\kappa(0)}\right| = p$

Hinweis: Hier wurde etwas leichtfertig mit der Stelle x = 0 umgegangen. Die Ableitungen $y'(0)$ und $y''(0)$ existieren nämlich nicht. Da sich aber nach dem Kürzen ein Krümmungswert ergibt, konnte man den Versuch wagen.

**Man kann auch eine Berechnung mit dieser Parameterdarstellung versuchen:** $\begin{Bmatrix} x(t) = \frac{1}{2p}\cdot t^2 \\ y(t) = t \end{Bmatrix}$

Daraus folgt: $\begin{Bmatrix} \dot{x}(t) = \frac{1}{p}t \\ \dot{y}(t) = 1 \end{Bmatrix}$ und $\begin{Bmatrix} \ddot{x}(t) = \frac{1}{p} \\ \ddot{y}(t) = 0 \end{Bmatrix}$

$$\kappa = \frac{\ddot{y}\cdot\dot{x} - \ddot{x}\cdot\dot{y}}{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{3/2}} = \frac{0-\frac{1}{p}}{\left(\frac{t^2}{p^2}+1\right)^{3/2}} = \frac{-\frac{1}{p}}{\left(\frac{t^2+p^2}{p^2}\right)^{3/2}} = \frac{-\frac{1}{p}}{\frac{\sqrt{t^2+p^2}^3}{p^3}} = -\frac{1}{p}\cdot\frac{p^3}{\sqrt{t^2+p^2}^3} = -\frac{p^2}{\sqrt{t^2+p^2}^3}$$

Den Scheitel erhält man in dieser Darstellung für t = 0:

$$\kappa(t=0) = -\frac{p^2}{\sqrt{p^2}^3} = -\frac{p^2}{p^3} = -\frac{1}{p}$$

Für den Krümmungskreisradius gilt: $r = \left|\frac{1}{\kappa(0)}\right| = p$.

Hier treten nicht die oben geschilderten Probleme auf.

# 6 Ausblick

1. Man bezeichnet Parabeln auch als „Kegelschnitte“-

   Zu Schnitten einer Ebene mit einem Doppelkegel gehören Kreis, Ellipse, Hyperbel und Parabel.
   Die gemeinsame Gleichung dieser sogenannten Kegelschnitte lautet:

$$y^2 = 2px + \left(\varepsilon^2 - 1\right) \cdot x^2$$

   Für $\varepsilon = 0$ erhält man einen Kreis,
   für $0 < \varepsilon < 1$ erhält man eine Ellipse,
   für $\varepsilon = 1$ erhält man eine **Parabel** und
   für $\varepsilon > 1$ eine Hyperbel.

2. In der analytischen Geometrie gibt es noch sehr viele Eigenschaften von Parabeln.
   Dazu gehören auch Tangenten.
   Diese Eigenschaften wird in den Texten der analytischen Geometrie, Ordner Parabeln besprochen.